B12T

Lösungsvorschlag zu Polynomfunktionen (1)

Nr		BE

1.1 $f(x) = \frac{1}{8}(x-4)^2(x+k)$ **NSt.:** $x_{1,2} = 4$, $x_3 = -k$

$k = -4:$ $x = 4$ dreifache Nullstelle

$k \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}:$ $x = 4$ doppelte NSt. , $x = k$ einfache NSt.

1.2 $f(x) = (x^2 - x - 2)(k - x)$ $x^2 - x - 2 = 0:$ $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

NSt.: $k = -1:$ $x_1 = -1$ doppelte NSt. , $x_2 = 2$ einfache NSt.

$k = 2:$ $x_1 = -1$ einfache NSt. , $x_2 = 2$ doppelte NSt.

$k \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}:$ $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = k$ einfache Nullstellen von f

2.1 $f(x) = \frac{1}{9}(x^4 - 4x^3) = \frac{1}{9}x^3(x-4)$ **NSt.:** $x_1 = 0$ (dreifach, also TEP) , $x_2 = 4$ (einfach)

2.2 **Monotonie, Extr.:** $f'(x) = \frac{1}{9}(4x^3 - 12x^2) = \frac{4}{9}x^2(x-3)$

$f'(x) = 0:$ $x_1 = 0$, $f(0) = 0$, $x_2 = 3$, $f(3) = \frac{1}{9} \cdot 27(-1) = -3$

D_f:		0		3		x
x^2:	+		+		+	
$x-3$:	−		−		+	
$f'(x)$:	−	TEP	−	TIP	+	

$\Longrightarrow$ f streng monoton abnehmend in $]-\infty; 3]$

f streng monoton zunehmend in $[3; \infty[$

$\Longrightarrow$ $T(3|-3)$ Tiefpunkt von G_f

2.3 **Krümmung, WP.:** $f''(x) = \frac{1}{9}(12x^2 - 24x) = \frac{4}{3}x(x-2)$

$f''(x) = 0:$ $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $f(2) = -\frac{16}{9}$

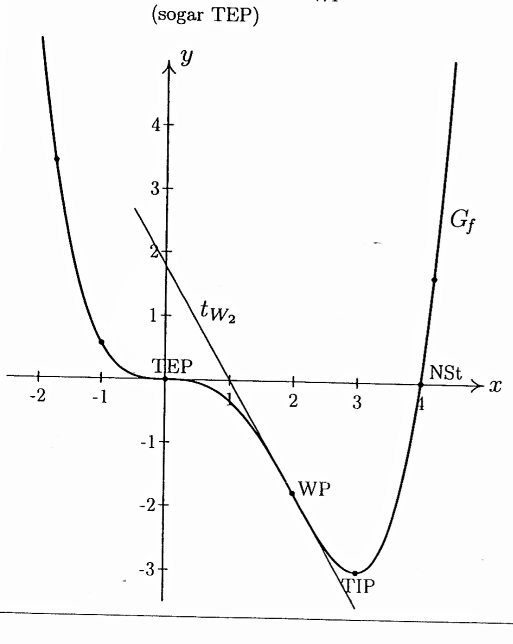
D_f:		0		2		x
x:	−		+		+	
$x-2$:	−		−		+	
$f''(x)$:	+	WP (sogar TEP)	−	WP	+	

$\Longrightarrow$ G_f linksgekrümmt in $]-\infty; 0]$ sowie in $[2; \infty[$

G_f rechtsgekrümmt in $[0; 2]$

$\Longrightarrow$ $W_1(0|0)$, $W_2(2|-\frac{16}{9})$ Wendepunkte von G_f

2.4



Wendetangente in $W_1(0|0):$ $y = 0$

Wendetangente in $W_2(2|-\frac{16}{9}):$ $f'(2) = -\frac{16}{9}$

$t_{W_2}:$ $y = -\frac{16}{9}x + b$

$W_2 \in t_{W_2}:$ $-\frac{16}{9} = -\frac{16}{9} \cdot 2 + b \iff b = \frac{16}{9}$

$t_{W_2}:$ $y = -\frac{16}{9}x + \frac{16}{9}$

Nr		BE
3.	$f(x)=\frac{1}{2}x^3+2x^2-x-3$, $f'(x)=\frac{3}{2}x^2+4x-1$, $g_t: \ y=4{,}5x+t$, $g_t(1)=4{,}5+t$ Berührung, falls $f(1)=g_t(1)$ und $f'(1)=g_t'(1)$: $f'(1)=1{,}5+4-1=4{,}5=g_t'(1)$; $f(1)=0{,}5+2-1-3=-1{,}5=4{,}5+t \iff t=-6$ $\Longrightarrow g_{-6}: \ y=4{,}5x-6$ berührt G_f in $P(1\|-1{,}5)$ Weitere gemeinsame Punkte: $\frac{1}{2}x^3+2x^2-x-3=4{,}5x-6 \mid \cdot 2 \iff x^3+4x^2-11x+6=0$ $x_1=1$ (ist sogar doppelte Berührstelle) $(x^3+4x^2-11x+6):(x-1)=x^2+5x-6$ $-(x^3-x^2)$ $5x^2-11x$ $-(5x^2-5x)$ $-6x+6$ $x_{2,3}=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{2}=\frac{-5\pm 7}{2}$ $x_2=1$, $x_3=-6$ gemeinsamer Punkt: $S(-6\|-33)$	
4.	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$, $f''(x)=6ax+2b$ $(0\|0)\in G_f$: $f(0)=d=0$ (I) $W\in G_f$: $216a+36b+6c=-2$ (II) $f''(6)=0$: $36a+2b=0$ (III) $f'(6)=1$: $108a+12b+c=1$ (IV) (III) $b=-18a$ in (IV) $108a-216a+c=1 \iff c=108a+1$ in (II) $216a-648a+648a+6=-2 \iff$ $a=-\frac{8}{216}=-\frac{1}{27}$, $b=\frac{18}{27}=\frac{2}{3}$, $c=-\frac{108}{27}+1=-3$ $\Longrightarrow f(x)=-\frac{1}{27}x^3+\frac{2}{3}x^2-3x$	
5.	$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$, $f''(x)=12ax^2+6bx+2c$ $f(0)=0$: $e=0$; $f'(0)=2$: $d=2$; $f''(0)=0$: $c=0$ $f(x)=ax^4+bx^3+2x$; $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2$ $f(4)=0$: $256a+64b+8=0$ (I) $f'(4)=0$: $256a+48b+2=0$ (II) $(I)-(II)$ $16b+6=0 \iff b=-\frac{6}{16}=-\frac{3}{8}$ in (II): $256a-18+2=0 \iff a=\frac{16}{256}=\frac{1}{16}$ $\Longrightarrow f(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{8}x^3+2x$	
6.	$f(x)=x^3(ax+b)$, $a\neq 0$ [$x=0$ ist dreifache NSt. wegen TEP] $f(x)=ax^4+bx^3$, $f'(x)=4ax^3+3bx^2$ $f'(3)=0$: $108a+27b=0 \iff b=-4a$ NSt.: $x_1=0$ (dreifach) , $x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-4a}{a}=4$ (einfach) $f'(4)=-4$: $256a+48b=256a-192a=64a=-4$, $a=-\frac{1}{16}$, $b=\frac{1}{4}$ $\Longrightarrow f(x)=-\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^3$	

Lösungsvorschlag zu Polynomfunktionen (1)

Nr		BE
7.	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $\qquad t_W:\ y=x+3\ ,\quad W(1\mid 4)$ WP $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ $f''(x)=6ax+2b$ $f''(1)=0:\quad 6a+2b=0 \qquad (I)$ $f'(1)=1:\quad 3a+2b+c=1 \qquad (II)$ $f(1)=4:\quad a+b+c+d=4 \qquad (III)$ $f(0)=2:\quad d=2 \qquad (IV)$ $(I)\quad b=-3a\ ,\quad$ in $(II)\quad 3a-6a+c=1 \iff c=1+3a\ ,\quad$ in $(III)\quad a-3a+1+3a+2=4$ $a=1\ ,\quad b=-3\ ,\quad c=4$ $\Longrightarrow f(x)=x^3-3x^2+4x+2$	
8.	$f(x)=ax^3+bx\ ,\quad a\neq 0$ $f'(x)=3ax^2+b$ $f''(x)=6ax$ $P\in G_f:\quad a+b=-2 \iff b=-2-a$ Steigung in Q: $\quad f'(\frac{1}{3}\sqrt{10})=3a\cdot\frac{10}{9}+b=\frac{10}{3}a-2-a=\frac{7}{3}a-2$ Steigung der Wendetangente senkrecht dazu: $f'(0)=-\dfrac{1}{\frac{7}{3}a-2}\quad$ (gilt nur für $a\neq\frac{6}{7}$) $\parallel$ $b=-\dfrac{1}{\frac{7}{3}a-2} \iff -2-a=-\dfrac{1}{\frac{7}{3}a-2}\quad \mid\cdot(-1)\cdot(\frac{7}{3}a-2) \iff$ $(\frac{7}{3}a-2)(2+a)=1 \iff \frac{7}{3}a^2+\frac{8}{3}a-5=0\quad \mid\cdot 3 \iff 7a^2+8a-15=0:$ $a_{1,2}=\dfrac{-8\pm\sqrt{64+420}}{14}=\dfrac{-8\pm 22}{14}$ $a_1=1\ ,\quad b_1=-3: \qquad f_1(x)=x^3-3x$ $a_2=-\frac{30}{14}=-\frac{15}{7}\ ,\quad b_2=\frac{1}{7}: \qquad f_2(x)=-\frac{15}{7}x^3+\frac{1}{7}x$	